-EXERCICE 26.6-

• ENONCE :

« Disque portant des dipôles »

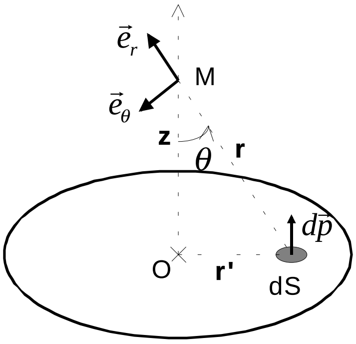
• On considère un disque (D) de rayon R et d'axe Oz ; il porte à sa surface, régulièrement répartis, des dipôles électrostatiques de moment dipolaire $\vec{p}$ parallèle à Oz.

• On note $\mu = \dfrac{dp}{dS}$ la densité surfacique de moment dipolaire ($p = \|\vec{p}\|$).

Calculer le champ électrostatique créé par la distribution en un point de l'axe du disque.

• **CORRIGE :**

« Disque portant des dipôles »



Tous les plans contenant OM sont plans de symétrie, le champ résultant est donc porté par Oz: il suffira de sommer les projections des champs élémentaires sur cet axe.
Nous allons utiliser l'expression du champ électrique créé par un dipôle élémentaire:

$d\vec{E} = \dfrac{dp}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\vec{e}_r + \sin\theta\vec{e}_\theta)$ avec : $dp = \mu dS$; en projection sur Oz, il vient :

$dE_z = dE_r \times \cos\theta - dE_\theta \times \sin\theta \Rightarrow dE_z = \dfrac{\mu dS}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[2\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] = \dfrac{\mu dS}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3\cos^2(\theta) - 1]$ (1)

Grâce à l'invariance par rotation autour de l'axe Oz, on peut prendre pour surface élémentaire dS une couronne de rayon r' et de largeur dr' $\Rightarrow dS = 2\pi r' \times dr'$.

Il faut maintenant choisir une variable unique d'intégration ; de manière générale, les calculs sont **plus simples** avec la variable **angulaire** θ (on y pensera également dans les calculs de champs magnétostatiques). Donc :

$r = \dfrac{z}{\cos\theta}$ et : $r' = z\tan\theta = z \times \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow dr' = z \times \dfrac{d\theta}{\cos^2(\theta)}$; on reporte dans l'expression (1) :

$$dE_z = \frac{2\pi\mu}{4\pi\varepsilon_0 z^3} \times z^2 \times \cos^3(\theta) \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{1}{\cos^2(\theta)} \times [3\cos^2(\theta) - 1]d\theta = \frac{\mu}{2\varepsilon_0 z}[3\cos^2(\theta) - 1]\sin\theta d\theta \Rightarrow$$

$dE_z = \dfrac{\mu}{2\varepsilon_0 z}(1 - 3u^2)du$ (en posant $u = \cos\theta$) $\Rightarrow$

$E_z = \dfrac{\mu}{2\varepsilon_0 z}\displaystyle\int_1^{u_M}(1 - 3u^2)du = \dfrac{\mu}{2\varepsilon_0 z}[u - u^3]_1^{u_M} = \dfrac{\mu}{2\varepsilon_0 z} \times u_M(1 - u_M^2)$ avec : $u_M = \cos\alpha$ et $\tan\alpha = \dfrac{R}{z} \Rightarrow$

$E_z = \dfrac{\mu}{2\varepsilon_0 z} \times \cos\alpha \times \sin^2(\alpha) = \dfrac{\mu}{2\varepsilon_0 R} \times \tan\alpha \times \cos\alpha \times \sin^2(\alpha) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{\mu}{2\varepsilon_0 R} \times \sin^3(\alpha)\vec{e}_z}$